Fis mec

FISICA MECANICA
DOCUMENTO DE CONTENIDO
MATEMATICAS PARA FISICOS

Objetivo general:

Brindar algunas herramientas matemáticas que los estudiantes de física necesitan para su buen desempeño en el curso de física mecánica.

Contenido:

PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES.

Aprende cómo realizar las distintas operaciones, en base a las **propiedades de las potencias**.

Potencias de exponente 0

$\mathbf{a^0 = 1}$

$5^0 = 1$

Potencias de exponente 1

$\mathbf{a^1 = a}$

$5^1 = 5$

Potencias de exponente entero negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a \neq 0$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Potencias de exponente racional

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Potencias de exponente racional y negativo

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Producto de potencias de igual base

Para multiplicar potencias de igual base, ponemos la misma base y sumamos los exponentes.

Ejemplo: $2^3 x\, 2^5$ = (2x2x2) x (2x2x2x2x2) = $2^8 = 2^{3+5}$ (como la base (2) es la misma, los exponentes se suman) y da como resultado = 2^{3+5} = 256

Multiplicación de potencias con el mismo exponente

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$2^3 \cdot 4^3 = 8^3$

División de potencias de igual base

Cuando queremos **dividir potencias que poseen la misma base**, debemos restar los exponentes.

Ejemplo: $2^5 : 2^2$ = (2x2x2x2x2) : (2×2) =$2^{5-2} = 2^3$= 8

División de potencias con el mismo exponente

$a^n : b^n = (a : b)^n$

$6^3 : 3^3 = 2^3$

Potencia de un producto

Si queremos realizar la siguiente operación: $(2\times3)^3$ observamos que $(2\times3)^3$ = (2×3) x (2×3) x (2×3) = (2x2x2) x (3x3x3) = 2^3 x 3^3.

Para calcular el resultado también podemos multiplicar (2×3) y elevar el producto al cubo: $(2\times3)^3$ = 6^3 = 216 O bien, elevar al cubo cada uno de los factores, que sería: 2^3 = 8 y 3^3 = 27 y luego, multiplicar el resultado: 8 x 27 = 216.

Decimos entonces que **la potencia de un producto es igual al producto de la potencia**.

Potencia de un cociente

La potencia de un cociente es igual al cociente entre la potencia del dividendo y la del divisor.

Tenemos que elevar el dividendo y el divisor a dicha potencia. Ejemplo: $(6:2)^{2} = 6^{2}: 2^{2} = 9$; Porque: $(6:2)^{2} = 3^{2} = 9$

Potencia de una potencia

Para elevar una potencia a otra potencia, debes poner la misma base y luego multiplicar los exponentes.

Ejemplo:

$(2^{2})^{3} = 64$; porque: $2^{2} \times 2^{2} \times 2^{2} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$; o también podemos multiplicar los exponentes: es decir, 2 x 3 y, luego elevar la base a dicho resultado.

Mira el ejemplo: $(2^{2\times3}) = 2^{6} = 64$

SIGNO

Las potencias de exponente par son siempre positivas.

$$(+)^{par} = +$$
$$(-)^{par} = +$$

$2^{6} = 64$

$(-2)^{6} = 64$

Las potencias de exponente impar tiene el mismo signo de la base.

$$(+)^{impar} = +$$
$$(-)^{impar} = -$$

$2^{3} = 8$

$(-2)^{3} = -8$

PROPIEDADES DE LOS RADICALES.

En matemática, la **radicación** de orden *n* de un número *a* es cualquier número *b* tal que $b^n = a$**,** donde *n* se llama índice u orden, *a* se denomina radicando, y *b* es una **raíz enésima**, por lo que se suele conocer también con ese nombre. La notación a seguir tiene varias formas:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}.$$

Para todo *n* natural, *a* y *b* reales positivos, se tiene la equivalencia:

$$a = b^n \iff b = \sqrt[n]{a}.$$

Raíz de un producto

La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores nombrados anteriormente.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo

- $\sqrt{3^2 \cdot 2^4} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2^4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12.$

Se llega a igual resultado de la siguiente manera:

$$\sqrt{3^2 \cdot 2^4} = \sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12.$$

Raíz de un cociente

La raíz de una fracción es igual al cociente de la raíz del numerador entre la raíz del denominador.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo

- $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}.$

Cuando esta propiedad se aplica a números, no hace falta pasar la raíz a potencia de exponente racional, aunque sí cuando se hace con variables.

Ejemplos

- $\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^9}} = \frac{x^{3/3}}{y^{9/3}} = \frac{x}{y^3}.$
- $(\sqrt[4]{a^2})^8 = (\ a^{2/4})^8 = \sqrt[4]{a^{16}}.$

Raíz de una raíz

Para calcular la raíz de una raíz se multiplican los índices de las raíces y se conserva el radicando.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}.$$

Ejemplo

- $\sqrt[9]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[27]{5}.$

Potencia de una raíz

Para calcular la potencia de una raíz se eleva el radicando a esa potencia.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplo

si 3 y 4

$$\left(\sqrt[4]{x}\right)^3 = \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}.$$

Otras propiedades

Utilizando las propiedades fundamentales, se pueden obtener otras propiedades interesantes, como por ejemplo, el cálculo de la raíz de un producto con el mismo radicando y distintos índices, que se obtiene multiplicando los índices de las raíces y conservando el radicando elevado a la suma de los índices.

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = a^{\frac{m+n}{mn}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$$

ALGEBRA BÁSICA.

Factor común

El resultado de multiplicar un binomio $a + b$ por un término c se obtiene aplicando la propiedad distributiva:

$$c(a + b) = ca + cb$$

Ejemplo:

$$3x(4x + 6y) = 12x^2 + 18xy$$

Binomio de suma al cuadrado

Un **binomio al cuadrado** (suma) es igual es igual al cuadrado del primer término, **más** el doble producto del primero por el segundo **más** el cuadrado segundo.

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

Binomio de resta al cuadrado

Un **binomio al cuadrado** (resta) es igual es igual al cuadrado del primer término, **menos** el doble producto del primero por el segundo, **más** el cuadrado segundo.

$$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}$$

$$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

Suma por diferencia

Una **suma por diferencia** es igual a **diferencia de cuadrados**.

$$\mathbf{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$$

$$(2x + 5) \cdot (2x - 5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$$

Binomio de suma al cubo

Un **binomio al cubo** (suma) es igual al cubo del primero, **más** el triple del cuadrado del primero por el segundo, **más** el triple del primero por el cuadrado del segundo, **más** el cubo del segundo.

$$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3}$$

$$(x + 3)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3 =$$

$$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

Binomio de resta al cubo

Un **binomio al cubo** (resta) es igual al cubo del primero, **menos** el triple del cuadrado del primero por el segundo, **más** el triple del primero por el cuadrado del segundo, **menos** el cubo del segundo.

$$\mathbf{(a - b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3}$$

$$(2x - 3)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 - 3^3 =$$

$$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

Trinomio al cuadrado

Un **trinomio al cuadrado** es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, más el cuadrado del tercero, más el doble del primero por el segundo, más el doble del primero por el tercero, más el doble del segundo por el tercero.

$$\mathbf{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c}$$

$$(x^2 - x + 1)^2 =$$

$$= (x^2)^2 + (-x)^2 + 1^2 + 2 \cdot x^2 \cdot (-x) + 2\, x^2 \cdot 1 + 2 \cdot (-x) \cdot 1 =$$

$$= x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 + 2x^2 - 2x =$$

$$= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

Suma de cubos

$$\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)}$$

$$8x^3 + 27 = (2x + 3)\,(4x^2 - 6x + 9)$$

Diferencia de cubos

$$\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)}$$

$$8x^3 - 27 = (2x - 3)\,(4x^2 + 6x + 9)$$

Producto de dos binomios que tienen un término común

$$\mathbf{(x + a)\,(x + b) = x^2 + (a + b)\,x + ab}$$

$$(x + 2)\,(x + 3) =$$

$$= x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 =$$

$$= x^2 + 5x + 6$$

Cocientes notables

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$$

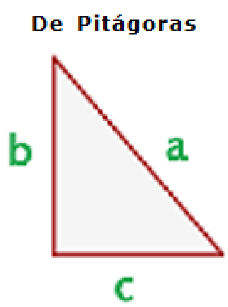
$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$$

TEOREMAS DE PITÁGORAS, SENO Y COSENO

Teorema de Pitágoras.



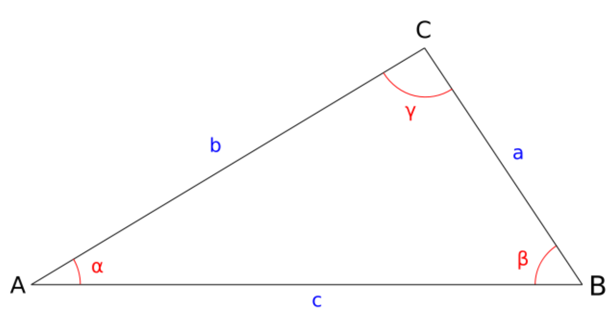
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \begin{matrix} \nearrow & c = \sqrt{a^2 - b^2} \\ \searrow & b = \sqrt{a^2 - c^2} \end{matrix}$$

Teorema del seno.

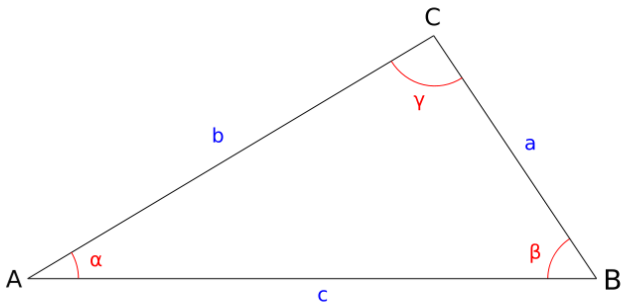
Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.



$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$

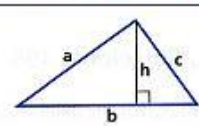
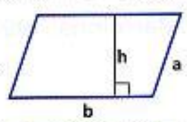
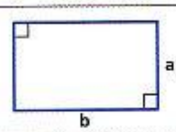
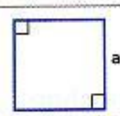
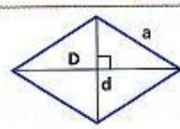
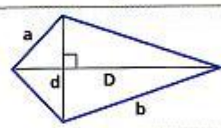
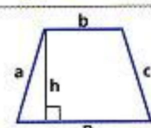
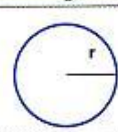
Teorema del coseno

Dado un triángulo ABC, siendo α, β, γ, los ángulos, y *a*, *b*, *c*, los lados respectivamente opuestos a estos ángulos entonces:

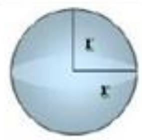
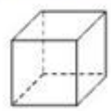
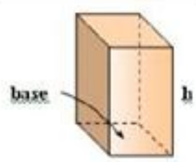
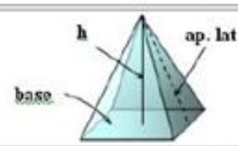


$$c^2 = \ a^2 + \ b^2 - 2abcos\gamma$$

GEOMETRÍA.

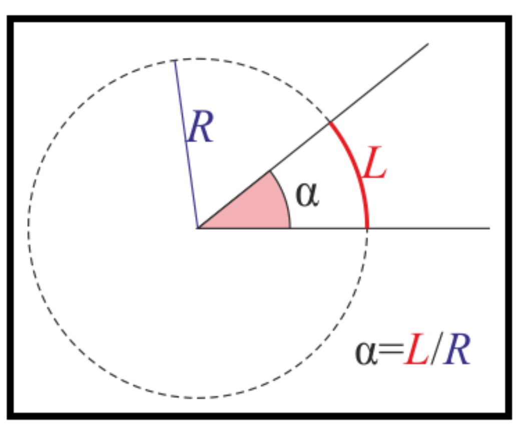
Perímetros y áreas de figuras planas		Perímetro	Area
Triángulo		a + b + c	$\frac{b \cdot h}{2}$
Paralelogramo		2 · (a + b)	b · h
Rectángulo		2 · (b + a)	b · a
Cuadrado		4 · a	a^2
Rombo		4 · a	$\frac{D \cdot d}{2}$
Cometa		2 · (b + a)	$\frac{D \cdot d}{2}$
Trapecio		B + b + a + c	$\frac{(B + b) \cdot h}{2}$
Círculo		2 · π · r	$\pi \cdot r^2$

Fórmulas de área y volumen de cuerpos geométricos

Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{total} = 2\pi r\ (h + r)$	$V = \pi\ r^2 \cdot h$
Esfera		$A_{total} = 4\pi\ r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Cono		$A_{total} = \pi\ r^2 + \pi\ r\ g$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cubo		$A = 6\ a^2$	$V = a^3$
Prisma		$A = (\text{perim.base} \times h) + 2 \cdot \text{area base}$	$V = \text{área base} \times h$
Pirámide		$A = \frac{\text{perim base} \times \text{ap lat}}{2} + \text{area base}$	$V = \frac{\text{area base} \times h}{3}$

MEDIDA RADIAN:

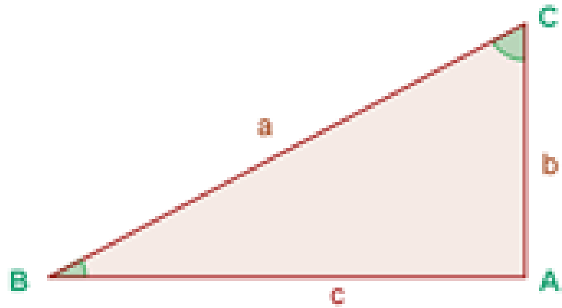
La longitud de arco **L** de arco circular (ver figura) es proporcional al radio **R** para un valor fijo de **α** (en radianes).



L = R.α, de donde se deduce que **α = L/R**

TRIGONOMETRIA.

Razones trigonométricas.



Seno

$$\text{sen B}= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

Coseno

$$\cos \text{B}= \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

Tangente

$$\text{tg B}= \frac{\text{sen B}}{\cos \text{B}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c}$$

Cosecante

$$\text{cosec B}= \frac{1}{\text{sen B}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

Secante

$$\sec \text{B}= \frac{1}{\cos \text{B}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{c}$$

Cotangente

$$\text{cotg B}= \frac{1}{\text{tg B}} = \frac{\cos B}{\text{sen B}} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS.

Relaciones básicas.

Relación pitagórica	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
Identidad de la razón	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

De estas dos identidades, se puede extrapolar la siguiente tabla. Sin embargo, nótese que estas ecuaciones de conversión pueden devolver el signo incorrecto (+ ó −). Por ejemplo, si $\sin\theta = 1/2$ la conversión propuesta en la tabla indica que $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{3}/2$, aunque es posible que $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$. Para obtener la única respuesta correcta se necesitará saber en qué cuadrante está θ.

Funciones trigonométrica en función de las otras cinco.

En términos de	$\sin$	$\cos$	$\tan$	$\cot$	$\sec$	$\csc$
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\csc\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\csc^2\theta-1}}{\csc\theta}$
$\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\csc^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\csc\theta}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\csc\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\csc\theta$

De las definiciones de las funciones trigonométricas:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

Teoremas de la suma y diferencia de ángulos

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

De lo que se sigue para determinados ángulos suplementarios::

$$\sin(\pi \pm x) = \mp \sin(x)$$

$$\cos(\pi \pm x) = -\cos(x)$$

$$\tan(\pi \pm x) = \pm \tan(x)$$

$$\csc(\pi \pm x) = \mp \csc(x)$$

Para ángulos complementarios:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x) \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$$

Para ángulos opuestos:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \csc(-x) = -\csc(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sec(-x) = \sec(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x) \qquad \cot(-x) = -\cot(x)$$

Identidades del ángulo doble, triple y medio

Pueden obtenerse remplazándolo y por x (o sea $\sin(x+x) = \sin(2x)$) en las identidades anteriores, y usando el teorema de Pitágoras para los dos últimos (a veces es útil expresar la identidad en términos de seno, o de coseno solamente).

Fórmula del ángulo doble			
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$	$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$	$\cot 2\theta = \frac{\cot\theta - \tan\theta}{2}$
Fórmula del ángulo triple			
$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$	$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$	$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$	
Fórmula del ángulo medio			
$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	$\tan\frac{\theta}{2} = \csc\theta - \cot\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$	$\cot\frac{\theta}{2} = \csc\theta + \cot\theta$